Том 27, № 137 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26
УДК 517.935

О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции

Мебрахтом Себхату ВОЛДЕАБ[1] **, Людмила Ивановна РОДИНА**[1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

[2] ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматривается задача оптимальной добычи ресурса из структурированной популяции, состоящей из отдельных видов, либо разделенной на возрастные группы. Динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и в определенные моменты времени из популяции извлекается часть ресурса. В частности, можно предполагать, что производится добыча различных видов рыбы, каждый из которых имеет определенную стоимость; кроме того, между этими видами существуют взаимодействия типа «хищник-жертва» или отношения конкуренции за пищу и места обитания. Исследуются свойства средней временной выгоды, которая равна пределу от средней стоимости ресурса при неограниченном увеличении моментов изъятия. Получены условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности, и указан способ построения управления для достижения этого значения. Показано, что для некоторых моделей взаимодействия двух видов такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению одного из видов и неограниченному росту второго. Поэтому представляется целесообразным исследовать представленную здесь задачу построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах модели «хищник-жертва» и модели конкуренции двух видов и могут быть применены к другим всевозможным моделям динамики популяций.

Ключевые слова: подверженная промыслу модель популяции, структурированная популяция, средняя временная выгода

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00293_а).

Для цитирования: *Волдеаб М.С., Родина Л.И.* О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 16–26. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26

About the methods of renewable resourse extraction from the structured population

Mebrahtom S. WOLDEAB[1] , **Lyudmila I. RODINA**[1,2]
[1] Vladimir State University
87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation
[2] National University of Science and Technology "MISIS"
4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. The problem of optimal extraction of a resource from the structured population consisting of individual species or divided into age groups, is considered. Population dynamics, in the absence of exploitation, is given by a system of ordinary differential equations and at certain time moments, part of the population, is extracted. In particular, it can be assumed that we extract various types of fish, each of which has a certain value. Moreover, there exist predator-prey interactions or competition relationships for food and habitat between these species. We study the properties of the average time benefit which is equal to the limit of the average cost of the resource with an unlimited increase in times of withdrawals. Conditions are obtained under which the average time benefit goes to infinity and a method for constructing a control system to achieve this value is indicated. We show that for some models of interaction between two species, this method of extracting a resource can lead to the complete extinction of one of the species and unlimited growth to the other. Therefore, it seems appropriate to study the task of constructing a control to achieve a fixed final value of the average time benefit. The results obtained here are illustrated with examples of predator-prey models and models of competition of two species and can be applied to other various models of population dynamics.

Keywords: model of the population subject to harvesting, structured population, average time benefit

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00293_a).

Mathematics Subject Classification: 34A37, 34H05, 49J15.

For citation: Woldeab M.S., Rodina L.I. O sposobakh dobychi vozobnovlyayemogo resursa iz strukturirovannoy populyatsii [About the methods of renewable resourse extraction from the structured population]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 16–26. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Многие ученые, начиная с прошлого века, занимались исследованием оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами (см. [1, 2]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций [3–5]. Множество работ также посвящено задачам периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, задачам оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследованию максимальной эффективности сбора ресурса [6, 7], получению наибольшей выгоды от эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями [8, 9].

В работе [10] получены оценки средней временной выгоды для популяций, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями; рассматриваются как однородные популяции, не разделенные на группы, так и структурированные, состоящие из $n \geqslant 2$ групп. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и достигается максимальная средняя временная выгода. В продолжение [10] в данной статье мы исследуем условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности, и строим управления для достижения этого значения. Показано, что данные условия, в частности, выполняются для модели «хищник-жертва», но такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению «хищников» и неограниченному росту «жертв». Поэтому представляется целесообразным исследовать представленную здесь задачу построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Полученные результаты проиллюстрированы на примере модели конкуренции двух видов и могут быть применены к другим всевозможным моделям динамики популяций.

1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим модель популяции, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd,$ где $d > 0,$ из популяции извлекается некоторая доля возобновляемого ресурса

$$u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n = 1,$ то популяцию называют однородной. При $n \geqslant 2$ популяция является структурированной, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n,$ либо разделена на n возрастных групп. В частности, можно считать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент $kd.$

Таким образом, мы исследуем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \big(1 - u_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$, решения системы уравнений $\dot{x} = f(x)$ существуют при всех $t \in [0,d]$.

Обозначим через $\varphi(t,x) = \big(\varphi_1(t,x),\ldots,\varphi_n(t,x)\big)$ решение системы $\dot{x} = f(x)$ (без импульсного воздействия), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$, где $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n_+$. Всюду в данной работе полагаем, что решение $\varphi(t,x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях. Чтобы данное условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ удовлетворяли следующему *условию квазиположительности* (см. [11, с. 34]):

$$f_i(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) \geqslant 0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Из равенств $x_i(kd) = \big(1 - u_i(k)\big) \cdot x_i(kd-0)$ в (1.1) следует, что решение системы (1.1) при выполнении условия квазиположительности также неотрицательное при любых неотрицательных начальных условиях.

Пусть $X_i(k) = x_i(kd-0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1,2,\ldots$, зависящее от долей ресурса $u(1),\ldots,u(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида (в предположении, что C_i одновременно не равны нулю). Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна $Y(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(k) u_i(k)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\overline{u} \doteq \big(u(1),\ldots,u(k),\ldots\big) \in [0,1]^\infty$. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\big(\overline{u},x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,.$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\overline{u},x(0)\big)$ и, если выполнено равенство $H_*\big(\overline{u},x(0)\big) = H^*\big(\overline{u},x(0)\big)$, то определим предел

$$H\big(\overline{u},x(0)\big) \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,. \tag{1.2}$$

2. Построение управления, при котором средняя временная выгода бесконечная

Рассмотрим популяцию, динамика которой задана системой (1.1). Введем в рассмотрение функцию $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x) - x_i\big)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что существует* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ *такое, что*
(1) $\varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1,\ldots,n$;
(2) *последовательности* $\big\{\varphi_i(kd,\widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1,\ldots,n$ *возрастают;*
(3) $D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big) \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.
Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d,x(0)) \neq 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2.1}$$

то существует режим эксплуатации $\overline{u}$, *при котором* $H\big(\overline{u},x(0)\big) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Укажем один из способов эксплуатации популяции $\overline{u}$, при котором можно достичь бесконечной средней временной выгоды. При $k = 1$ выберем управление

$$u(1) = \big(u_1(1),\ldots,u_n(1)\big) = \Big(1 - \frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,x(0))},\ldots,1 - \frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d,x(0))}\Big).$$

Из условия квазиположительности и (2.1) следует, что $u(1) \in [0,1]^n$. Тогда в момент времени $t = d$ количество собранного ресурса каждого вида равно

$$X_i(1)u_i(1) = \varphi_i(d,x(0))\Big(1 - \frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d,x(0))}\Big) = \varphi_i(d,x(0)) - \widehat{x}_i, \tag{2.2}$$

а количество оставшегося ресурса равно

$$x_i(d) = (1 - u_i(1))\varphi_i(d,x(0)) = \widehat{x}_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, $x(d) = \widehat{x}$. Найдем $X(2) = \varphi(d,x(d)) = \varphi(d,\widehat{x})$.

Дальнейшие управления полагаем равными $u(2k) = (0,\ldots,0)$,

$$u(2k+1) = \Big(1 - \frac{\varphi_1(kd,\widehat{x})}{\varphi_1((k+1)d,\widehat{x})},\ldots,1 - \frac{\varphi_n(kd,\widehat{x})}{\varphi_n((k+1)d,\widehat{x})}\Big), \quad k = 1,2,\ldots.$$

Из условия квазиположительности и условия (2) теоремы следует, что $u(2k+1) \in [0,1]^n$. Найдем $x(2d) = X(2) = \varphi(d,\widehat{x})$, $X(3) = \varphi(d,x(2d)) = \varphi(2d,\widehat{x})$,

$$x(3d) = (1 - u(3))X(3) = \frac{\varphi(d,\widehat{x})}{\varphi(2d,\widehat{x})}X(3) = \varphi(d,\widehat{x}).$$

Аналогично находим, что $x(2kd) = x((2k+1)d) = \varphi(kd,\widehat{x})$,

$$X(2k) = \varphi(kd,\widehat{x}),\ X(2k+1) = \varphi((k+1)d,\widehat{x}),\ k = 1,2,\ldots.$$

Отметим, что при данном способе эксплуатации в моменты времени $t=2kd$, $k=1,2,\ldots$ ресурс не извлекался; количество ресурса, извлеченного в момент $t=d$, определено в (2.2); а количество ресурса, добытого в момент $t = (2k+1)d$, $k = 1,2,\ldots$, составляет

$$X(2k+1)u(2k+1) = \big(\varphi_1((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_1(kd,\widehat{x}),\ldots,\varphi_n((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_n(kd,\widehat{x})\big).$$

Стоимость ресурса, собранного в момент $t = d$, равна $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(X_i(1) - \widehat{x}_i\big)$, и для $t = (2k+1)d$, $k = 1,2,\ldots$, данная стоимость равна

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(kd,\widehat{x})\big) = D(\varphi(kd,\widehat{x})). \tag{2.3}$$

Поэтому общая стоимость ресурса, извлеченного в моменты $t = d, 3d, \ldots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(2j-1)u_i(2j-1) = \sum_{i=1}^{n} C_i\bigl(X_i(1)-\widehat{x}_i\bigr) + \sum_{j=2}^{k} D(\varphi(jd,\widehat{x})).$$

Найдем среднюю временную выгоду

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j)u_i(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(2\ell-1)u_i(2\ell-1)$$
$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i\bigl(X_i(1)-\widehat{x}_i\bigr) + \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d,\widehat{x})) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d,\widehat{x})). \quad (2.4)$$

По свойству предела от среднего арифметического, из условия (3) теоремы следует, что $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = +\infty$. □

Следствие 2.1. *Предположим, что существует $\widehat{x} \in \mathbb{R}^+_n$, такое, что*
(1) $\varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$;
(2) *последовательности* $\bigl\{\varphi_i(kd,\widehat{x})\bigr\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \ldots, n$ *возрастают;*
(3) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(kd,\widehat{x}) = +\infty$.
Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}^+_n$ *выполнено* (2.1), *то существует режим эксплуатации* $\overline{u}$, *при котором* $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Режим эксплуатации $\overline{u}$ выберем так же, как в доказательстве теоремы 2.1. Тогда из (2.3) следует, что суммарная стоимость ресурса, извлеченного в моменты времени $t = 3d, \ldots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d,\widehat{x})) = \sum_{\ell=2}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_i\bigl(\varphi_i((\ell+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(\ell d,\widehat{x})\bigr) = \sum_{i=1}^{n} C_i\bigl(\varphi_i((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(2d,\widehat{x})\bigr).$$

Таким образом, из условия (3) следствия получаем

$$H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{\ell=2}^{k} D(\varphi(\ell d,\widehat{x})) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i((k+1)d,\widehat{x}) = +\infty.$$

□

Теорема 2.2. *Пусть существуют $\widehat{x} \in \mathbb{R}^+_n$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ такие, что:*
(1) $\varphi_i(d,\widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;
(2) *последовательности* $\bigl\{\varphi_i(kd,\widehat{x})\bigr\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ *возрастают;*
(3) $\varphi_i(kd,\widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \ldots$;
(4) $D\bigl(\varphi(kd,\widehat{x})\bigr) = \sum\limits_{i\in I} C_i\bigl(\varphi_i((k+1)d,\widehat{x}) - \varphi_i(kd,\widehat{x})\bigr) \to +\infty$ *при* $k \to \infty$.
Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}^+_n$ *выполнены неравенства*

$$\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, x(0)),\ i = 1, \ldots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0,\ i \in I, \quad (2.5)$$

то существует режим эксплуатации $\overline{u}$, *при котором* $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = +\infty$.

Доказательство. Отметим сначала, что если множество $J \doteq \{1,\ldots,n\}\setminus I$ пустое, то доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 2.1.

Далее будем предполагать, что множество J непусто. Для всех $i\in J$ положим $u_i(k)=0$, $k=1,2,\ldots$. Для $i\in I$ определим $u_i(k)$, как в теореме 2.1, то есть

$$u_i(1)=1-\frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d,x(0))};\quad u_i(2k)=0,\ \ u_i(2k+1)=1-\frac{\varphi_i(kd,\widehat{x})}{\varphi_i((k+1)d,\widehat{x})},\ \ k=1,2,\ldots.$$

Аналогично (2.4) получаем, что

$$H\big(\overline{u},x(0)\big)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{j=2}^{k}D(\varphi(jd,\widehat{x}))=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i\in I}C_i\big(\varphi_i((j+1)d,\widehat{x})-\varphi_i(jd,\widehat{x})\big).$$

Таким образом, если $D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big)\to+\infty$ при $k\to\infty$, то $H\big(\overline{u},x(0)\big)=+\infty$. $\square$

Замечание 2.1. Утверждение теоремы останется верным, если условие (4) заменить следующим условием:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i\in I}C_i\varphi_i(kd,\widehat{x})=+\infty.$$

Это доказывается так же, как в следствии 2.1.

Пример 2.1. Покажем, что для модели «хищник-жертва» средняя временная выгода может быть бесконечной, и найдем управления, при которых она достигается. Рассматриваем модель, заданную системой уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}_1=(\alpha-\beta x_2)x_1,\\ \dot{x}_2=(-\gamma+\delta x_1)x_2.\end{cases}\tag{2.6}$$

Здесь x_1 и x_2 — размеры популяций жертв и хищников соответственно, все коэффициенты системы положительные (свойства решений системы (2.6) описаны в [12]).

Пусть $\widehat{x}_1$ — произвольное положительное число, $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,0)$, $I=\{1\}$. Найдем $\varphi_1(kd,\widehat{x})=\widehat{x}_1e^{\alpha kd}$, $\varphi_2(kd,\widehat{x})=0$, где $k=1,2,\ldots$. Очевидно, что последовательность $\big\{\varphi_1(kd,\widehat{x})\big\}_{k=1}^{+\infty}$ возрастает и

$$D\big(\varphi(kd,\widehat{x})\big)=C_1\big(\varphi_1\big((k+1)d,\widehat{x}\big)-\varphi_1(kd,\widehat{x})\big)=C_1\widehat{x}_1(e^{\alpha d}-1)e^{\alpha kd}\to+\infty,\quad k\to\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.2, поэтому $H\big(\overline{u},x(0)\big)=+\infty$.

Укажем один из способов управления, при котором $H\big(\overline{u},x(0)\big)=+\infty$. Из доказательства теоремы 2.2 следует, что для начальной точки $x(0)$, такой, что $\varphi_i(d,x(0))\geqslant\widehat{x}_i$, $i=1,2$, можно выбрать следующие управления:

$$u(1)=\Big(1-\frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,x(0))},1\Big),\quad u(2k)=(0,0),\quad u(2k+1)=\big(1-e^{-\alpha d},0\big),\quad k=1,2,\ldots.$$

Здесь в момент $t=d$ производится отлов части «жертв» и всех «хищников», что создает благоприятные условия для «жертв». Бесконечное значение $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ достигается только за счет популяции «жертв».

3. Построение управления для достижения фиксированной средней временной выгоды

Достижение бесконечной средней временной выгоды не всегда экономически оправдано и, как показано в примере 2.1, может привести к уничтожению одного из видов. Рассмотрим задачу построения управления для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x)-x_i\big),$$

или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху. В [10] показано, что если $D(x)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^*\in\mathbb{R}^n_+$, такой, что $x^*_i\leqslant\varphi_i(d,x^*)\neq 0$ и $\varphi_i(d,x(0))\geqslant x^*_i$ для всех $i=1,\ldots,n$, то наибольшее значение функции $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ равно $D(x^*)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(\varphi_i(d,x^*)-x^*_i\big)$.

Обозначим через $E(D)$ множество значений функции $D(x)$.

Теорема 3.1. *Пусть $h\in E(D)\cap[0,+\infty)$ фиксировано, и существует точка $\widehat{x}\in\mathbb{R}^n_+$ такая, что $D(\widehat{x})=h$ и $\widehat{x}_i\leqslant\varphi_i(d,\widehat{x})\neq 0$ для всех $i=1,\ldots,n$. Тогда для любого $x(0)\in\mathbb{R}^n_+$ такого, что $\varphi_i(d,x(0))\geqslant\widehat{x}_i$, $i=1,\ldots,n$, функция $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:*

$$u(1)=\left(1-\frac{\widehat{x}_1}{X_1(1)},\ldots,1-\frac{\widehat{x}_n}{X_n(1)}\right);\ u(k)=\left(1-\frac{\widehat{x}_1}{\varphi_1(d,\widehat{x})},\ldots,1-\frac{\widehat{x}_n}{\varphi_n(d,\widehat{x})}\right),\ \ k\geqslant 2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_i(d,x(0))\geqslant 0$ и $X_i(1)=\varphi_i(d,x(0))\geqslant\widehat{x}_i$, $i=1,\ldots,n$, то $u(1)\in[0,1]^n$. Из условия $\widehat{x}_i\leqslant\varphi_i(d,\widehat{x})\neq 0$, $i=1,\ldots,n$ следует, что $u(k)\in[0,1]^n$, $k\geqslant 2$. При управлениях $\overline{u}=\big(u(1),\ldots,u(k),\ldots\big)$, указанных в (3.1), найдем

$$x(d)=(1-u(1))X(1)=\frac{\widehat{x}}{X(1)}X(1)=\widehat{x},$$

$$X(2)=\varphi(d,x(1))=\varphi(d,\widehat{x}),\ \ x(2d)=(1-u(2))X(2)=\frac{\widehat{x}}{\varphi(d,\widehat{x})}\,\varphi(d,\widehat{x})=\widehat{x}.$$

Аналогично,

$$x(kd)=\widehat{x},\quad X(k)=\varphi(d,\widehat{x}),\ \text{ для всех } k\geqslant 2. \tag{3.2}$$

Далее, из (1.2) и (3.2) следует, что

$$\begin{aligned}H\big(\overline{u},x(0)\big)&\doteq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(j)u_i(j)\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(1)u_i(1)+\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(d,\widehat{x})\Big(1-\frac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d,\widehat{x})}\Big)\right)\\&=0+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{n}C_i\big(\varphi_i(d,\widehat{x})-\widehat{x}_i\big)=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k}\cdot D(\widehat{x})=h.\end{aligned}$$

Таким образом, при режиме эксплуатации (3.1) выполнено $H\big(\overline{u},x(0)\big)=h$. □

Отметим, что при некоторых значениях h точку $\widehat{x}$ можно выбрать только так, что у нее будет равна нулю одна из координат. Управления, при которых $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ достигает данного значения h, приведены в следующем утверждении, которое доказывается аналогично теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $h \in E(D) \cap [0, +\infty)$ *фиксировано. Предположим, что существуют точка* $\widehat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *и непустое подмножество* $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *такие, что:*

(1) $D(\widehat{x}) = h$;

(2) $\widehat{x}_i \leqslant \varphi_i(d, \widehat{x}) \neq 0$ *для всех* $i \in I$;

(3) $\varphi_i(kd, \widehat{x}) = 0$ *для всех* $i \notin I$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ *выполнены неравенства* (2.5), *то функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает значения* h *при следующем режиме эксплуатации:*

если $i \in I$, *то* $u_i(1) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}$ *и* $u_i(k) = 1 - \dfrac{\widehat{x}_i}{\varphi_i(d, \widehat{x})}$ *при* $k \geqslant 2$;

если $i \notin I$, *то* $u_i(1) = 1$ *и* $u_i(k) = 0$ *при* $k \geqslant 2$.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2, которая описана в [12, с. 147]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a \leqslant b$. Следующее утверждение доказано в [10] при $C_1 \leqslant C_2$; случай $C_1 > C_2$ рассматривается аналогично.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть в системе* (3.3) $a \leqslant b$ *и* $C_1 \leqslant C_2$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ *такого, что* $\varphi_2(d, x(0)) \geqslant x_2^* = \dfrac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$, *функция* $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = D(0, x_2^*) = \frac{c\, C_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(1) = \left(1, 1 - \frac{x_2^*}{\varphi_2(d, x(0))}\right); \; u^*(k) = \big(0, 1 - e^{-cd/2}\big), \;\; k \geqslant 2.$$

Следовательно, для достижения наибольшей средней временной выгоды нужно извлекать только один вид ресурса — тот, который имеет большую стоимость.

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 получаем, что для модели (3.3) можно достичь фиксированной средней временной выгоды $H\big(\overline{u}, x(0)\big) = h \in [0, D(0, x_2^*)]$ и нельзя добиться значения $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$, большего, чем $D(0, x_2^*)$.

References

[1] D. D. Bainov, “Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population”, *Applied Mathematics and Computation*, **39**:1 (1990), 37–48.

[2] А. И. Абакумов, “Оптимальный сбор урожая в популяциях (модели с непрерывным временем)”, *Математическое моделирование*, **5**:11 (1993), 41–52. [A. I. Abakumov, “Populations optimal harvest (time continuous models)”, *Matem. Mod.*, **5**:11 (1993), 41–52 (In Russian)].

[3] Г. П. Неверова, О. Л. Жданова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы структурированного сообщества хищник-жертва и их изменение в результате антропогенного изъятия особей”, *Математическая биология и биоинформатика*, **15**:1 (2020), 73–92. [G. P. Neverova, O. L. Zhdanova, E. Ya. Frisman, “Dynamics of predator-prey community with age structures and its changing due to harvesting”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **15**:1 (2020), 73–92 (In Russian)].

[4] А. И. Абакумов, Ю. Г. Израильский, “Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:2 (2016), 191–204. [A. I. Abakumov, Yu. G. Izrailsky, “The harvesting effect on a fish population”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:2 (2016), 191–204 (In Russian)].

[5] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, “Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:1 (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:1 (2016), 1–13 (In Russian)].

[6] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, “Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса”, *Труды ИММ УрО РАН*, **22**:2 (2016), 38–46; англ. пер.:A. O. Belyakov, A. A. Davydov, “Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **299**:suppl. 1 (2017), 14–21.

[7] А. А. Давыдов, “Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, **310**, МИАН, М., 2020, 135–142; англ. пер.:A. A. Davydov, “Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **310** (2020), 124–130.

[8] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resourse from the structured population”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

[9] А. В. Егорова, “Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 15–25. [A. V. Egorova, “Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 15–25 (In Russian)].

[10] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, **1** (2022), 12–24. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of biological resourse extraction, providing the maximum average time benefit”, *Russian Mathematics*, **1** (2022), 12–24 (In Russian)].

[11] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Изд-во Нижегородского ун-та, Нижний Новгород, 2007. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Matematicheskoe Modelirovanie Processov Otbora*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhny Novgorod, 2007 (In Russian)].

[12] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1*, Математическая биология, биофизика, Издательство «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 560 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Mathematical biology, biophysics, Publisher “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 560 pp.]

Информация об авторах

Волдеаб Мебрахтом Себхату, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: mebseb2018@gmail.com

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1586-4728

Information about the authors

Mebrahtom S. Woldeab, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.

E-mail: mebseb2018@gmail.com

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1586-4728

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики. Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1077-2189

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Родина Людмила Ивановна
E-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.02.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Ludmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department. National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1077-2189

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Lyudmila I. Rodina
E-mail: LRodina67@mail.ru

Received 03.12.2021
Reviewed 15.02.2022
Accepted for press 10.03.2022